

У

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

И Ф В Э 81-45

ОЭФ

С.И.Битюков, С.А.Садовский, В.К.Семенов, В.В.Смирнова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИВНЕЙ
В ГОДСКОПИЧЕСКИХ КАЛОРИМЕТРАХ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Серпухов 1981

Аннотация

Битюков С.И., Садовский С.А., Семенов В.К., Смирнова В.В.

Определение параметров ливней в годоскопических калориметрах методом моментов. Серпухов, 1981.
23 стр. с рис. (ИФВЭ ОЭФ 81-45).

Библиогр. 17.

В работе методом моментов решена задача определения координат и энергий каждого из двух электромагнитных ливней при их пространственном наложении в годоскопических калориметрах. Подробно рассмотрен одномерный случай и приведено решение для двумерного случая, имеющего место в годоскопических калориметрах ячеистого типа. Проведен анализ пространственного и энергетического разрешений предлагаемого метода. Получена аналитическая зависимость пространственного разрешения годоскопических калориметров от размера годоскопического элемента, описывающая имеющиеся экспериментальные данные. Рассмотрены вопросы учета смещения выборочных значений групповых моментов высших порядков. При реализации полученного в работе решения не требуются большие затраты машинного времени и жесткие условия на однородность годоскопических элементов в калориметрах.

Рассмотренный метод может найти применение при определении параметров статистически обеспеченных перекрывающихся спектров или сигналов одинаковой формы.

Abstract

Bitjukov S.I., Sadovsky S.A., Semenov V.K., Smirnova V.V.

Evaluation of Shower Parameters by the Moment Method in Hodoscope Calorimeters.
Serpukhov, 1981.

p. 23. (INEP 81-45).

Refs. 17.

The present work uses the moment method to evaluate the coordinates and energies of either electromagnetic shower in their space overlapping in hodoscope calorimeters. One-dimensional case has been considered in detail as well as the solution for a two-dimensional case inherent in cell-type hodoscope calorimeters is presented. Space and energy resolutions for the proposed method have been analyzed. An analytic dependence, describing the available experimental data, of hodoscope calorimeter space resolution on the hodoscope element size has been obtained. Considerations for shift of sample values of high-order group moments have also been treated. Realization of the found solution does not require much computer time and severe constraints on uniformity of hodoscope elements in calorimeters.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для регистрации фотонов и адронов высокой энергии в последние годы созданы калориметры годоскопического типа^{/1/}. Они представляют собой детекторы полного поглощения с годоскопической структурой. Многомерный амплитудный анализ распределения энерговыведения по годоскопическим элементам (ячейкам) позволяет наряду с измерением полного энерговыведения определять координаты центра тяжести распределения, которые служат оценками координат самой частицы. Достижимая при этом координатная точность на порядок величины лучше, чем ширина ливня или размер ячейки калориметра. Существенным достоинством годоскопического калориметра является возможность измерения энергий и координат одновременно нескольких ливней при изучении процессов множественного образования частиц. Однако эффекты пространственного наложения ливней в рабочем объеме годоскопических калориметров и дополнительное ограничение на пространственное разрешение, накладываемое шириной ячейки h , ухудшают точность измерения характеристик каждого ливня. Роль годоскопических калориметров особенно возрастает при сверхвысоких энергиях частиц, характерной особенностью взаимодействий которых является большая множественность пионов и фотонов в конечном состоянии. В этой связи можно ожидать большого потока информации с годоскопических калориметров, для обработки которой необходимы быстродействующие алгоритмы, обеспечивающие необходимую точность определения кинематических параметров частиц в событиях с большой множественностью.

В работах ^{/2,3/} был использован быстродействующий алгоритм для отбора и обработки событий, связанных с регистрацией пар гамма-квантов от распада π^0 -мезонов. В основе алгоритма лежит использование первого и второго центральных моментов распределения энергосигнала пары ливней по годоскопическим элементам. Он позволяет определять параметры π^0 без определения характеристик отдельных фотонов, но при условии идеальной однородности светособирания вдоль годоскопических элементов и их полной идентичности. Это затрудняет использование подобного алгоритма в реальных гамма-спектрометрах (в силу конструктивных особенностей, несовершенства технологии, отсутствия материалов с необходимыми свойствами) и делает его непригодным при решении задач, связанных с определением параметров каждого ливня. С другой стороны, знание значений измеренных параметров каждого ливня в реальном калориметре позволяет, используя соответствующие калибровочные зависимости, определить их истинные значения, в том числе учесть систематические искажения, связанные с конечным размером ячейки h .

В настоящей работе рассматривается применение классического метода моментов ^{/4/} для определения параметров отдельных ливней из пары в одномерном и двумерном пространстве, проводится анализ точности получаемых оценок параметров и обсуждаются вопросы, связанные с конечным размером ячейки годоскопических калориметров.

2. МЕТОД МОМЕНТОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ДВУХ ЛИВНЕЙ

2.1. Уравнения моментов

В случае годоскопического калориметра суть метода моментов заключается в приравнивании выборочных моментов наблюдаемого в отдельном событии распределения энергосигнала $F(x_1)$ пары перекрывающихся ливней по годоскопическим элементам (ячейкам) к соответствующим теоретическим моментам, выраженным в терминах искоемых параметров. Решения полученной таким образом системы уравнений берутся в качестве оценок искоемых параметров.

Распределения $F(x_i)$ представляются численно по сгруппированным данным. Поэтому их моменты несколько отличаются от моментов негруппированных (непрерывных) распределений $F(x)$. Процедура компенсации этого расхождения будет рассмотрена в разд. 3, здесь же будем считать, что оно пренебрежимо мало и x — непрерывная случайная величина.

Используя свойство аддитивности энерговыделения, запишем плотность совместного распределения энерговыделения пары ливней:

$$F(x) = S_1 f(x - x_1) + S_2 f(x - x_2), \quad (1)$$

где x_1, x_2, S_1 и S_2 — искомые параметры; $f(x)$ — функция, описывающая нормированную плотность распределения энерговыделения одиночного ливня, практически не зависящая от энергии^{5,6/}, с первыми начальными моментами x_1, x_2 соответственно для первого и второго ливней в данной реализации пары. При этом предполагается, что существует и известно необходимое число выборочных центральных моментов $f(x)$ более высокого порядка. Тогда начальный момент n -го порядка функции (1) (уравнение моментов) есть

$$M_n = \int x^n dF(x) = S_1 \mu'_n(1) + S_2 \mu'_n(2), \quad (2)$$

где начальные моменты n -го порядка i -го одиночного ливня можно выразить через его центральные (μ_j) и первый начальный (x_i) моменты:

$$\mu'_n(i) = \sum_{j=0}^n C_n^j x_i^{n-j} \mu_j, \quad (C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}). \quad (3)$$

Выражение (2) является исходным для получения системы уравнений моментов ($n = 0, 1, 2, 3$). Система (2) легко упрощается:

$$S_1 x_1^n + S_2 x_2^n = m_n, \quad (4)$$

где m_n определяется рекуррентным соотношением $m_0 = M_0$,

$$m_n = M_n - \sum_{j=1}^n C_n^j \mu_j m_{n-j}.$$

Решение системы (4) имеет вид

$$x_{1,2} = \frac{m_1}{m_0} + t \pm \sqrt{t^2 + m_2 - \frac{m_1^2}{m_0}},$$

$$S_{1,2} = \frac{m_0 - m_0 x_{2,1}}{x_{1,2} - x_{2,1}},$$

$$t = \frac{m_3 m_0^2 - 3m_2 m_1 m_0 + 2m_1^2}{2(m_2 m_0 - m_1^2) m_0},$$
(5)

где в качестве оценок теоретических моментов M_n и μ_j используются соответственно моменты выборки $M_n = \sum_j x_j^n F(x_j) / \sum_j F(x_j)$ и моменты $\langle \mu_j \rangle$ выборочных распределений $f(x_j)$, получаемых в калибровочных измерениях с однократными ливнями.

К рассмотренному выше одномерному случаю можно свести задачу определения параметров двух распределений одинаковой формы в n -мерном пространстве путем выбора главной оси эллипсоида суммарного распределения за ось X . В качестве иллюстрации в приложении рассмотрен двумерный случай для калориметров с ячеистой структурой.

2.2. Погрешности оценок метода моментов

Определенные по данным выборки конечного объема численные значения оценок искомых параметров являются величинами случайными, меняющимися в сериях повторных равнозначных измерений в соответствии с определенным распределением. В асимптотическом пределе, когда объем выборки становится бесконечно большим, оценки метода моментов распределены относительно их истинных значений по нормальному закону с соответствующей дисперсией^{/4/}. В общем случае вид распределения оценок, получаемых на ограниченном числе экспериментальных наблюдений, неизвестен. Поэтому свойства оценок метода моментов изучались в настоящей работе двумя способами с помощью моделирования.

В первом способе для моделирования использовались электромагнитные ливни, зарегистрированные в реальных годоскопических калориметрах

при облучении их пучком электронов. Ливни с заранее определенными параметрами (x_i, S_i) группировались в пары с различными расстояниями ℓ между ними. Полученные таким образом события обрабатывались по описанному выше (п. 2.1) алгоритму.

Во втором, более простом, способе моделирования сами уравнения моментов (2) применялись для получения выборочных моментов M совместного распределения энерговыведения пары перекрывающихся ливней при тех же значениях ℓ . Для этого в (2) подставлялись значения искомым параметров и случайные значения центральных моментов μ_i одиночного ливня. μ_i разыгрывались методом Монте-Карло на основе соответствующих спектров, полученных в калибровочных измерениях с пучком электронов.

Погрешности найденных с помощью (5) значений искомым параметров оценивались их среднеквадратичными отклонениями от истинных (заданных) значений при одном и том же ℓ и не зависели от способа моделирования. Это дало возможность использовать более простой и требующий меньших затрат машинного времени второй способ моделирования для получения функциональной зависимости точности метода моментов от ℓ и отношения энерговыведений ($S_1/S_2 = X$) в ливнях. Величины, характеризующие точность, достигнутую в методе моментов, в зависимости от ℓ при $X = 1$ ($\alpha = S_1/(S_1 + S_2) = S_2/(S_1 + S_2) = 1/2$) приведены на рис.1. Примерно с 20%-ной точностью абсолютную погрешность искомым параметров при $X < 1$ можно выразить через их значения при $X = 1$ ($\Delta\ell$ и $\Delta\alpha$): $\Delta\ell_X = \Delta\ell/\sqrt{X}$; $\Delta x_1 = \sqrt{2}\Delta\ell$, $\Delta x_2 = \Delta x_1/\sqrt{X}$ (x_1 и x_2 измеряются в системе центра тяжести пары); $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha$, $\Delta\alpha_2 = \Delta\alpha/X$ ($\alpha_1 = S_1/(S_1 + S_2)$, $\alpha_2 = S_2/(S_1 + S_2)$). $\Delta m/m$ есть относительная точность определения инвариантной массы частицы (π^0 -мезона), распадающейся на пару гамма-квантов, порождающих пару ливней в годоскопических калориметрах. При этом ℓ соответствует минимальному углу раствора пары гамма-квантов.

На рис. 1 приведены результаты, полученные при помощи первого способа моделирования с использованием ливней, зарегистрированных в модели годоскопического черенковского спектрометра ячеистого типа (ГАМС)^{/7/} при облучении пучком электронов различных зон ее центральной ячейки. Обработ-

ка событий производилась по алгоритму, описанному в приложении. Аналогичным образом моделировались события в годоскопическом газоразрядном гамма-детекторе установки ПРОЗА^{18/}.

$$\frac{\Delta l}{l}; \frac{\Delta a}{a}/\sqrt{3}; \frac{\Delta m}{m}$$

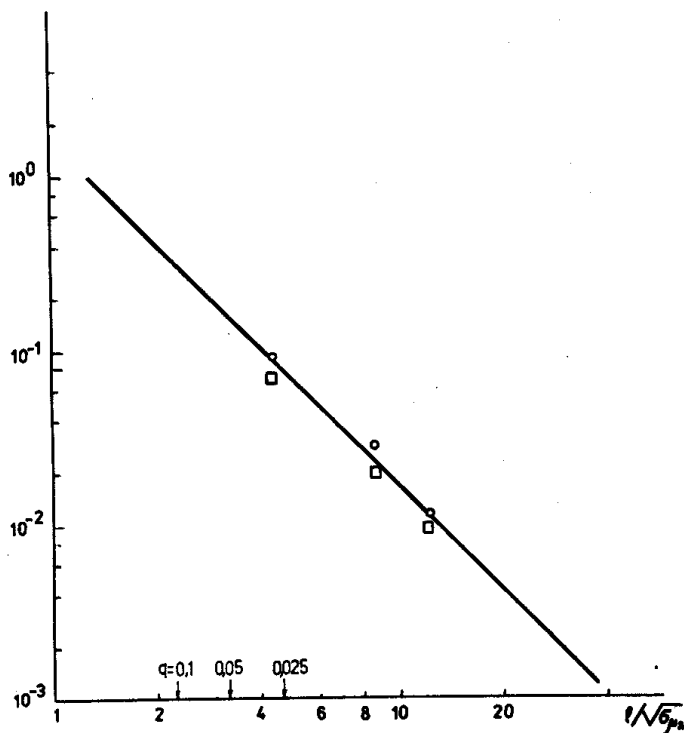


Рис. 1. Зависимость погрешностей оценок метода моментов от расстояния l между ливнями одинаковой энергии ($\Delta l/l$, $\Delta a/a$ и $\Delta m/m$ — соответственно относительно точности определения l , энергии и инвариантной массы m). Прямая — результаты, полученные с помощью метода Монте-Карло. \circ — ($\Delta l/l$); \square — ($\Delta a/a$) — результаты, полученные с использованием электромагнитных ливней^{17/}. Стрелками указаны расстояния между ливнями в паре, при которых вероятность идентифицировать пару как один ливень равна q (числа над стрелками).

На рис. 2 приведено смоделированное событие, полученное наложением двух исходных ливней, заштрихованных для наглядности тонкими ливнями с разным наклоном. Ширина годоскопического элемента в пространстве гамма-детектора составляет 1 см. Стрелками указаны оценки центров тяжести исходных ливней. Толстой ломаной линией (огibaющей) изображено выборочное распределение энерговыведения пары перекрывающихся ливней $F(x_i)$, для которого вычисляются выборочные моменты M_n , необходимые для нахождения искоемых параметров (5).

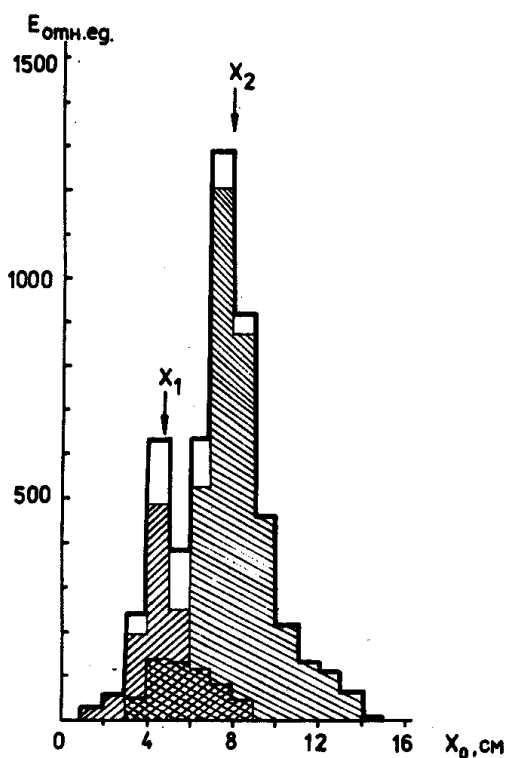


Рис. 2. Событие, полученное наложением отличающихся центрами тяжести (x_1 , x_2) и энергиями (S_1 , S_2) двух одиночных ливней /8/. Профили отдельных ливней заштрихованы тонкими линиями с разным наклоном. Огибающая представляет распределение энерговыделения E (в отн. ед.) пары ливней по годоскопическим элементам, расположенным вдоль оси x_0 .

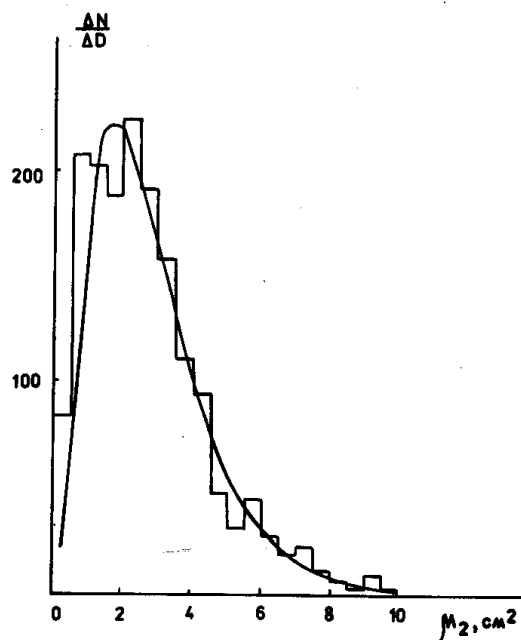


Рис. 3. Выборочное распределение второго центрального момента μ_2 одиночных ливней /8/ (гистограмма). Плавной кривой изображено χ^2 -распределение (6).

Результаты, полученные при помощи второго способа моделирования с использованием распределений выборочных центральных моментов μ_i одиночных ливней, представлены прямой линией на рис. 1. Как следует из расчетов, определяющую роль среди μ_i играет μ_2 . Используемое в этом способе распределение μ_2 для одиночных ливней, регистрируемых газоразрядным гамма-детектором /8/, приведено на рис. 3. Здесь же изображено χ^2 -распределение, которое довольно хорошо описывает распределение μ_2 . Кроме того, анализ аналогичных выборочных распределений μ_2 , измеренных в годоскопических калориметрах с крупной ячейкой /7/, где проявляются эффекты объединения данных в группы (см. разд. 3), показал, что во всех

рассмотренных случаях переменная $n_0(\bar{\mu}_2 - D_{\text{яч}})/(\langle \mu_2 \rangle - D_{\text{яч}})$ (записанная по аналогии с выражением для нормированной на σ^2 дисперсии S^2 выборки объемом n_0 из нормальной совокупности), имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы n_0 . Значение n_0 , как оказалось, примерно равно среднему числу годоскопических элементов (ячеек), в которых зарегистрирован ливень при выбранном пороге регистрации. $\langle \mu_2 \rangle$ - среднее значение группового центрального момента второго порядка выборки случайных величин $\bar{\mu}_2$, а $D_{\text{яч}}$ - дисперсия годоскопической ячейки. Из-за отсутствия точного выборочного распределения μ_2 в общем случае такая параметризация необходима и удобна при его аппроксимации. В частности, распределение, изображенное на рис. 3 плавной кривой, можно записать в виде

$$\frac{\Delta N}{\Delta D} = \frac{\Delta N}{\Delta \mu_2} = N_{\Sigma} \frac{n_0}{\langle \mu_2 \rangle} \chi_{n_0}^2 \left(n_0 \frac{\mu_2}{\langle \mu_2 \rangle} \right), \quad (6)$$

где $\chi^2(n)$ - χ^2 -распределение с n_0 по степеням свободы; $n_0 = 6$, $\langle \mu_2 \rangle = 3,2 \text{ см}^2$; N_{Σ} - нормировочный множитель, а $D_{\text{яч}} = 1/12 \text{ см}^2$ и пренебрежимо мала.

С помощью описанной параметризации выборочных распределений μ_2 , пользуясь величиной $\langle \mu_2 \rangle$ и свойствами χ^2 -распределения, даже в отсутствие самих выборочных распределений μ_2 , можно оценить величину σ_{μ_2} . Это необходимо, как видно из рис. 1, для представления данных о точности метода моментов в виде универсальной функции ℓ вне зависимости от типа годоскопического калориметра, если ℓ выражать в единицах $\sqrt{\sigma_{\mu_2}}$, т.е. погрешности оценок метода моментов определяются флуктуациями μ_2 около $\langle \mu_2 \rangle$, в то время как погрешность центра тяжести энерговыделения отдельного ливня зависит от самой величины $\langle \mu_2 \rangle$ /9/.

Результаты моделирования позволяют указать значения вероятности (q), идентифицировать пару ливней как один ливень, т.е. определить потерю пар при обработке методом моментов. В качестве проверочной статистики /4/ при этом удобно выбрать оценку ℓ . Тогда относительное число событий в распределении оценок ℓ с расстояниями между ливнями ≤ 0 оп-

ределяет искомую вероятность (уровень значимости). Определенные таким образом величины ℓ для трех значений $q(\ell)$, равных 0,025; 0,05 и 0,1, указаны на рис. 1. Односторонняя критическая граница^{/10/} для ℓ , определенная из результатов моделирования для заданных q , совпадает (с удовлетворительной для практических целей точностью) с величинами ℓ , определенными с помощью распределения Стьюдента (с одной степенью свободы), и соотношения

$$\ell = \Delta \ell \cdot t_{q,1} \quad (7)$$

Соотношение (7) удобно для оценочных расчетов граничных значений расстояний ℓ в методе моментов по результатам, приведенным на рис. 1 ($\Delta \ell / \ell$).

Вопросы выбора одной из альтернативных гипотез (один или пара ливней) по экспериментальным данным будут рассмотрены ниже (п. 3.2).

2.3. Стандартные ошибки моментов в модели независимых частиц

В предыдущих разделах обсуждались вопросы, связанные с оценками статистических параметров, полученных по выборкам конечного объема, в качестве которых рассматривались конкретные реализации профилей пары перекрывающихся в годоскопических калориметрах электромагнитных ливней. Причем изложение велось без каких-либо модельных представлений о форме пространственного распределения энерговыделения ливней. При известной форме распределения можно найти погрешности оценок даже в случае выборки конечного размера, воспользовавшись аппаратом вычисления стандартных ошибок моментов^{/11/}.

В годоскопических калориметрах как плоского, так и ячеистого типа форма профиля ливня описывается экспоненциальной зависимостью^{/12/}

$$f(x) = \exp\{-|x|/b\} \quad (8)$$

или суммой экспонент с разными весами^{/13,14/}.

В модели независимых частиц^{/9/} каждая реализация профиля рассматривается как плотность распределения n некоррелированных частиц по координате x . Число некоррелированных частиц составляет примерно 1/3 от измеряемого числа частиц N в электромагнитном ливне^{/9/}.

С точностью до членов порядка n^{-1} выборочная дисперсия статистики μ_2 равна^{/11/}

$$D_{\mu_2} = \frac{1}{n} (\mu_4 - \mu_2^2). \quad (9)$$

Тогда для зависимости (8) $\mu_2 = 2b^2$, $\mu_4 = 24b^4$ и

$$D_{\mu_2} = \frac{5}{n} \mu_2^2 \quad (10)$$

или

$$\sigma_{\mu_2} = \sqrt{\frac{5}{n}} \mu_2 \quad (11)$$

(в отличие от нормального закона, где $\sigma_{\mu_2} = \sqrt{2/n} \mu_2$).

Зависимость (11) можно проследить (рис. 4) на примере электромагнитного ливня, регистрируемого в скинцилляционном годоскопе с ячейкой малого размера (5 мм)^{/5/}, который размещался за свинцовыми пластинами разной толщины Z . На рис. 4 изображены зависимости величины флуктуаций поперечных размеров ливня σ_{μ_2} на разной глубине в свинце для энергий $E = 5$ и 14 ГэВ соответственно. Зависимости получены из экспериментальных данных^{/5/} с учетом (8). Здесь же плавными кривыми изображены рассчитанные по (11) аналогичные теоретические зависимости. Необходимые при построении последних каскадные кривые $n(Z)$ взяты из^{/6/}, а значения $\mu_2(Z)$ — из измерений^{/5/}. Нормировка расчетных кривых произведена в области максимума соответствующих каскадных кривых. Для энергий $E > 10$ ГэВ наблюдается довольно хорошее согласие расчетных и экспериментальных зависимостей флуктуаций вторых центральных моментов от толщины Z свинца. Это согласие еще раз свидетельствует об удовлетворительном описании в указанной области энергий картины развития электромагнитного ливня в модели независимых частиц, так как ранее с ее помощью были описаны экспериментально наблюдаемые флуктуации первого начального момента, т.е. центра тяжести поперечного энерговыделения ливня^{/9/}:

$$\sigma_{\mu_1} = \sqrt{\frac{\mu_2}{n}}. \quad (12)$$

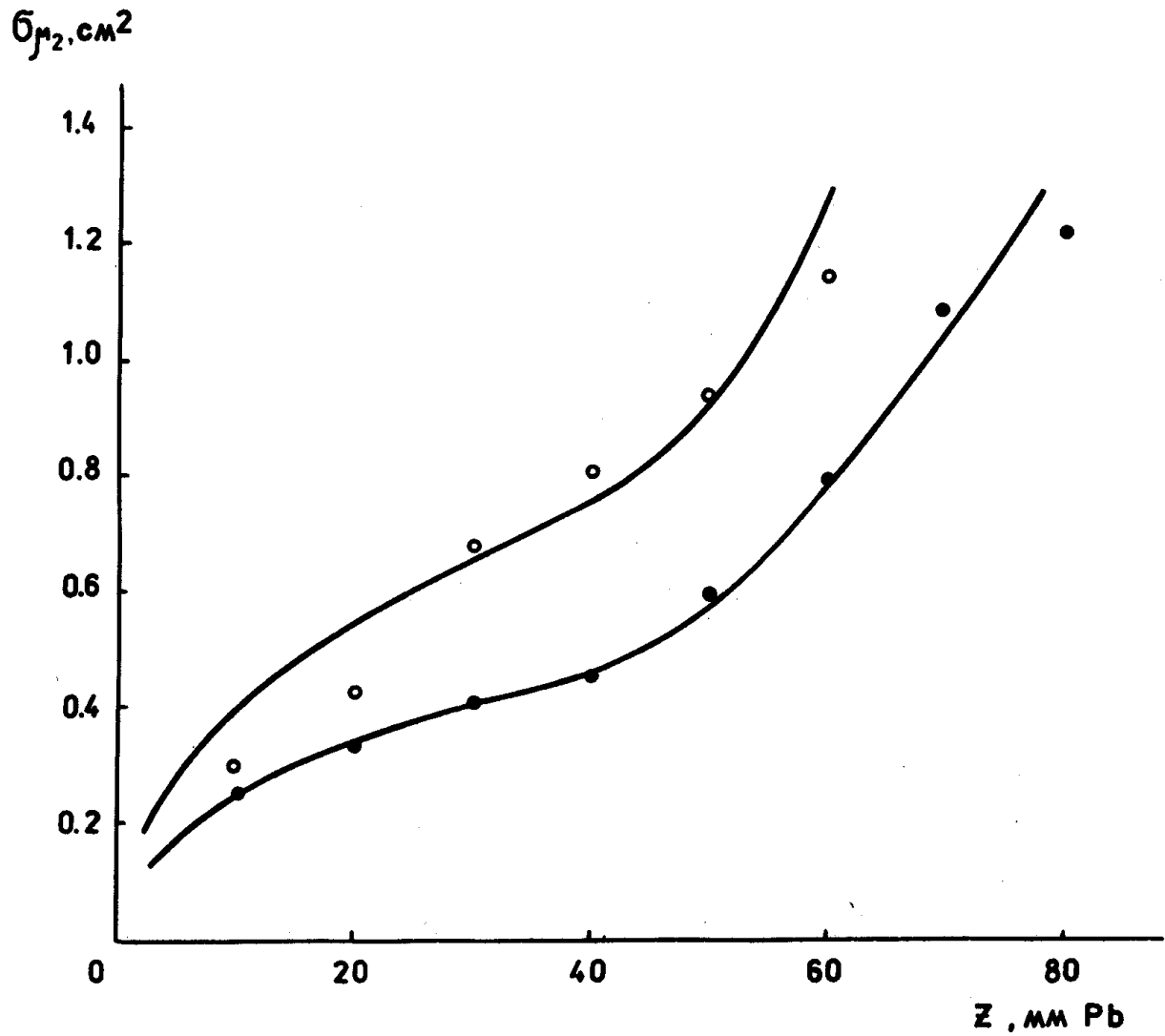


Рис. 4. Зависимость флуктуаций поперечных размеров (σ_{μ_2}) одиночных электромагнитных ливней от их длины (Z) в свинце. Результаты, полученные из экспериментальных данных для электронов с энергиями 5 и 14 ГэВ, обозначены соответственно точками \circ и \bullet . Плавные кривые — результаты расчета по модели независимых частиц (разд. 2,3).

С практической точки зрения значения σ_{μ_2} , получаемые экспериментально или с помощью (11), необходимы, как отмечалось выше, для определения точности оценок метода моментов (рис. 1). Причем, как следует из (9), оценки метода моментов можно получить с высокой точностью за счет увеличения объема выборки n , например, в спектроскопии при определении параметров перекрывающихся распределений или в случае обработки статистически обеспеченных и малофлуктуирующих по форме перекрывающихся сигналов.

3. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ РАЗМЕРА ЯЧЕЙКИ НА КООРДИНАТНУЮ ТОЧНОСТЬ ГОДСКОПИЧЕСКИХ КАЛОРИМЕТРОВ

3.1. Групповые моменты распределения энерговыделения в годоскопической структуре

В калориметрах с годоскопической структурой, как отмечалось выше, энерговыделение ливня (его профиль) представляется в виде распределения, заданного численно по сгруппированным данным, что приводит к смещению его моментов (групповых) относительно несгруппированного (истинного) распределения. При сканировании узким пучком частиц, порождающих ливни, вдоль одной из координатных осей в поперечном сечении годоскопического калориметра групповые центральные моменты одиночного ливня меняются с периодом, равным ширине ячейки h . Случайное расположение интервалов группировки в реальных условиях вызывает значительное увеличение флуктуаций выборочных моментов по сравнению с поперечными флуктуациями развития ливня (11). Следовательно, для улучшения точности рассматриваемого метода и уменьшения систематических ошибок в случае крупной годоскопической ячейки необходимо учитывать зависимость первого начального и центральных моментов более высокого порядка от места положения оси ливня в ячейке.

В случае, когда энерговыведение ливня описывается экспоненциальной зависимостью (8), значение первого начального группового (обозначаемого чертой сверху) момента $\overline{\mu}_1' \equiv x_0$ связано с координатой ливня x_c соотношением ^{/12/}

$$\overline{\mu}_1' = 0,5 \operatorname{Sh}(x_c \delta) / \operatorname{Sh}(\delta/2), |x_c| \leq 0,5h, \quad (13)$$

а для средних значений групповых начальных моментов ^{/11/} второго и третьего порядков нами получены соответственно следующие выражения:

$$\overline{\mu}_2' = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{Ch}(x_c \delta)}{\operatorname{Sh}(\delta/2)} \Psi(\delta) + \frac{1}{6} \right], \quad (14)$$

$$\overline{\mu}_3' = \overline{\mu}_1' \left[f(\delta) / \delta + \frac{1}{4} \right], \quad (15)$$

где $\delta = h/b$ (b -показатель экспоненты (8)); $\Psi(\delta) = 1 + 2/(e^\delta - 1)$; $f(\delta) = \delta \cdot \Psi^2 - 1,5\Psi + 1,5(1 + 2e^{-\delta})$. Величины моментов в (13-15) выражены в единицах h^τ , где τ - порядок момента.

На рис. 5 в качестве примера приведена зависимость (14), вычисленная для случая двухэкспоненциального профиля ливня ^{/13/}, и для сравнения - аналогичная экспериментальная зависимость, полученная на модели универсального годоскопического черенковского спектрометра ГАМС ^{/7/}. Как видно из рис. 5, обе зависимости находятся в удовлетворительном согласии.

Переход от начальных к центральным моментам осуществляется по известной биномиальной формуле ^{/11/}. Полученные таким образом зависимости центральных моментов от x_c (или от $\overline{\mu}_1'$, что удобнее для практических целей) описывают с 10%-ной точностью аналогичные зависимости выборочных центральных моментов в случае ячеистого спектрометра ^{/16/}.

Наличие в формулах (13-15) всего одного параметра b делает их удобными для приближенного учета зависимости центральных моментов от $\overline{\mu}_1'$ в случае крупной годоскопической ячейки.

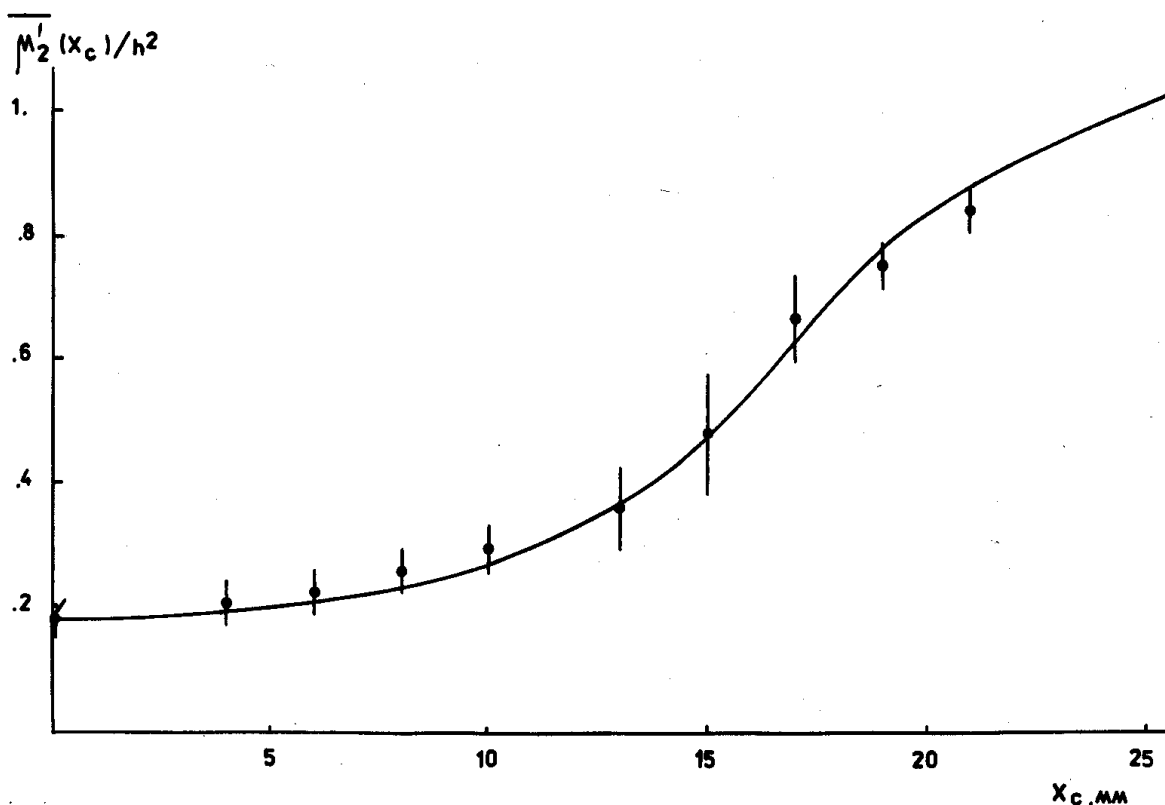


Рис. 5. Зависимость величины группового начального момента второго порядка μ_2 от положения x_c оси ливня в годоскопической ячейке размером h ($x_c = 0$ - центр ячейки). Точки - экспериментальные данные/7/. Кривая - зависимость (14), вычисленная для двухэкспоненциального профиля ливня/13/.

Более точное описание достигается аппроксимацией экспериментальных зависимостей $\overline{\mu}_r'(\overline{\mu}_1')$ полиномами. Для этой цели в области измерения $\overline{\mu}_1'(0-h)$ мы использовали полиномы Чебышева (4-ой степени для центрального момента второго порядка и 7-ой степени третьего порядка). Подобная аппроксимация позволила практически полностью учесть систематическое смещение центральных моментов второго и третьего порядков, в то время как учет аналогичных зависимостей для смешанных двумерных моментов первого и второго порядков не приводит к заметному уменьшению флуктуаций значений выборочных моментов. Поэтому (см. приложение) их можно без ущерба для точности приравнять к средним значениям.

Возможны и другие способы коррекции систематического смещения центральных моментов. В частности, можно использовать определенную в калибровочных измерениях плотность распределения энерговыведения электромагнитного ливня по ячейкам калориметра в зависимости от координаты оси ливня $\bar{\mu}_1$ в ячейке. Знание такой плотности позволяет численно рассчитывать величины центральных моментов (см. приложение) при любом расположении оси ливня в ячейке.

3.2. Использование χ^2 -критерия для выделения одиночных ливней

В годоскопических калориметрах показана возможность идентификации частиц вместе с возможностью разделения одиночных гамма-квантов и пар от распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ по величине дисперсии $D = \bar{\mu}_2(0)$ профиля ливня для случая, когда ось пучка исследуемых частиц или ось пары направлены в центр ($x_c = 0$) годоскопической ячейки^{/7/}. Знание зависимостей центральных групповых моментов от положения оси ливня в центральной ячейке позволяет провести статистическую проверку гипотезы о наличии в событии пары слившихся ливней при любом расположении ее оси в годоскопической ячейке. В этом случае в качестве меры расхождения величин выборочных моментов анализируемого события от теоретических можно принять квадратичную форму (в отличие от D ^{/7/}), записанную для краткости в символическом виде

$$\chi^2 = (m - \mu)^* V^{-1} (m - \mu), \quad (16)$$

где $(m - \mu)^*$ - вектор-строка, а $(m - \mu)$ - вектор-столбец, компонентами которого служат отклонения m от μ ; V - корреляционная матрица тех же отклонений для одиночного ливня. Таким образом, с помощью эмпирического критерия χ^2 (16) осуществляется многомерный анализ профиля исследуемого события при выборе одной из альтернативных гипотез (1 γ - или 2 γ -событий).

3.3. Зависимость координатной точности от ширины ячейки

При конструировании годоскопических калориметров принципиальным вопросом является выбор размера его ячейки h . Для этого на одиночных

центральных ливнях экспериментально прослеживается зависимость /13,15/ координатной точности σ_{x_c} от h (рис. 6), которую можно получить, используя (13,14):

$$\sigma_{x_c}(\delta) = \sigma_{x_c}(0) [\Psi(\delta) \text{Sh}(\delta/2)]^{0.5}. \quad (17)$$

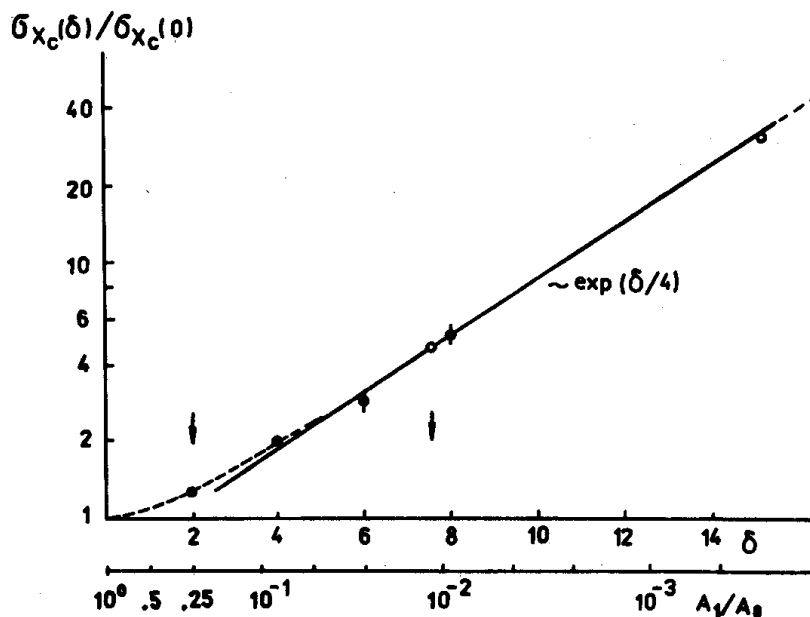


Рис. 6. Зависимость точности определения координаты ливня ($\sigma_{x_c}(\delta)$) в ед. $\sigma_{x_c}(0)$, см. (12) в годоскопическом калориметре от величины отношения $\delta = h/b$. Пунктирная кривая - зависимость (17). Сплошная прямая - зависимость $\sim \exp(\delta/4)/1/$. \circ, \bullet - экспериментальные данные /13,15/. Экспериментальные данные нормированы на расчетные значения (17) для величин δ , указанных стрелками (см. разд. 3.3).

На шкале A_1/A_0 отложены величины отношений энерговыделений в соседних ячейках для соответствующих значений δ : A_0 - энерговыделение ливня в ячейке, через центр которой проходит ось ливня; A_1 - энерговыделение в соседней ячейке.

Здесь $\sigma_{x_c}(0)$ определяется по (12), а из (14) вычитаем дисперсию годоскопической ячейки. Согласие экспериментальных данных с расчетом (17) достигается, если для вычисления δ используются характеристики центральных областей ливней. Это является следствием того, что значения x_0 в годоскопических калориметрах с крупной ячейкой получаются по амплитудам сигнала

лов в центральных ячейках в зоне ливня, так как амплитуды сигналов в периферийных ячейках становятся сравнимы с имеющими место в анализирующем тракте в целом амплитудами "шумовых сигналов" самого разного происхождения (шумы, нестабильность электроники и годоскопических элементов, погрешности их калибровки и т.п.)^{/13,15/}. Из сравнения данных рис. 6 можно сделать вывод об универсальном характере функции (17) для годоскопических калориметров, вне зависимости от их типа (плоский, ячеистый) и природы регистрируемых в них ливней (в отличие от параметрического описания^{/1,15/}).

При заданном размере годоскопической ячейки, пользуясь формулами (13-15), можно получить зависимость $\sigma_{x_c}(\delta, x_c)$ ^{/1/} (где x_c характеризует положение оси ливня в центральной ячейке), которая необходима для корректного определения погрешностей восстанавливаемых по измеренным величинам кинематических переменных.

3.4. Возможности метода моментов в случае адронного ливня

Наблюдаемая в адронном калориметре^{/15/} зависимость σ_{x_c} от энергии регистрируемых адронов E может быть описана формулой (17) с $b = 2,5$ см и $n \cong 0,7E$, где n - среднее число проникающих частиц в адронном ливне, а энергия E в ГэВ. Используя эти значения b , n и (11), можно оценить величину $\sqrt{\sigma_{\mu_2}}$ для адронного ливня в годоскопическом калориметре плоского типа^{/15/}, которая, как оказывается, близка к оценке следующей из экспериментальной величины σ_{μ_2} для модели спектрометра ГАМС^{/7/}. Величина $\sqrt{\sigma_{\mu_2}}$ в области энергий \sim десятков ГэВ равна 2-3 см, что позволяет надеяться (см. рис. 1) на получение методом моментов довольно точных оценок координат и энергий (наряду с электромагнитными) отдельных адронных ливней при их пространственном наложении в годоскопических калориметрах.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод моментов в задаче разделения перекрывающихся пиков приводит к замкнутым аналитическим результатам, что является существенным при

обработке большого потока экспериментальной информации или при статистически обеспеченном моделировании с целью определения различного рода экспериментальных разрешений, эффективностей и т.п.

Алгоритм, реализующий данный метод, применен для определения характеристик частиц, распадающихся на два гамма-кванта, по энергосъемлению электромагнитных ливней в годоскопическом черенковском спектрометре ячеистого типа ГАМС^{/16/} и газоразрядном гамма-детекторе^{/17/}. В обоих случаях метод моментов обеспечил пространственное и энергетическое разрешения, адекватные физическим задачам. При этом, в отличие от работы^{/2/}, не требовалось наложения жестких условий на однородность светособирания в годоскопических элементах газоразрядного гамма-детектора^{/8,17/}. Необходимые поправочные зависимости находились в калибровочных измерениях и учитывались при обработке реальных событий.

Рассмотренный в настоящей работе метод может найти применение при экспресс-обработке малофлуктуирующих перекрывающихся сигналов одинаковой формы, например, при индукционном съеме информации с пропорциональных камер или в спектроскопии при разделении перекрывающихся спектров, так как в последнем случае флуктуации соответствующих выборочных моментов можно свести до необходимого минимума за счет увеличения объема выборки.

Авторы выражают признательность Ю.Д.Прокошкину за поддержку настоящей работы и полезные замечания. Мы также благодарны А.Г.Лавкину и В.В.Сиксину за помощь в расчетах, а Ю.А.Матуленко и В.Л.Соловьянову за плодотворные дискуссии.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю.Д.Прокошкин. Препринт ИФВЭ 79-148, Серпухов, 1979.
2. M.L.Vincelli. Proc. of the XVII Intern. Conf. on High Energy Physics, London, 1974, v. I, p. 35.
3. В.Д.Апель, А.Аугенштайн, Е.Бертолуччи и др. Препринт ИФВЭ 75-28, Серпухов, 1975; ЯФ, 22, 1031 (1975); Phys.Lett, 56B, 190 (1975).
4. Статистические методы в экспериментальной физике. Перевод с англ. под редакцией проф. А.А.Тяпкина. М., Атомиздат 1976.

5. В.А.Качанов, В.М.Кутъин, В.Г.Лалшин и др. Препринт ИФВЭ 71-89, Серпухов, 1971; ПТЭ, 5, 25 (1972).
6. И.С.Байшев, Н.В.Мохов. Препринт ИФВЭ 79-124, Серпухов, 1979.
7. В.А.Давыдов, А.В.Инякин, В.А.Качанов и др. Препринт ИФВЭ 76-155, Серпухов, 1976.
8. И.А.Аввакумов, В.Д.Апокин, А.Н.Васильев и др. Препринт ИФВЭ 81-15, Серпухов, 1981.
9. Н.С.Мельников, Е.А.Разуваев, В.К.Семенов. Препринт ИФВЭ 78-144, Серпухов, 1978; ПТЭ, 2, 49 (1980).
10. Н.В.Смирнов, И.В.Дудин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., "Наука", 1969.
11. М.Кендалл, А.Стьюарт. Теория распределений. М., "Наука", 1966.
12. Ю.Б.Бушнин, Р.Джонсон, С.В.Донсков и др. Препринт ИФВЭ 74-21, Серпухов, 1974; Nucl. Instr. Meth., 120, 391 (1974).
13. Г.А.Акопджанов, А.В.Инякин, В.А.Качанов и др. Препринт ИФВЭ 76-110, Серпухов, 1976; Nucl. Instr. Meth., 140, 441 (1977).
14. Н.К.Вишневский, А.Г.Лавкин, В.Г.Лалшин и др. Препринт ИФВЭ 78-169, Серпухов, 1978; ПТЭ, 3, 53 (1980).
15. Ф.Бинон, К.Брикман, М.Гуанер, и др. Препринт ИФВЭ 79-128, Серпухов, 1979.
16. Ф.Бинон, К.Брикман, Ю.Б.Бушнин и др. Препринт ИФВЭ 78-133, Серпухов, 1978.
17. В.Д.Апокин, А.Н.Васильев, Н.К.Вишневский и др. Препринт ИФВЭ 81-18, Серпухов, 1981.

Рукопись поступила в издательскую группу
16 марта 1981 года.

Приложение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВУХ ЛИВНЕЙ В ГОДОСКОПИЧЕСКОМ КАЛОРИМЕТРЕ С КРУПНОЙ ЯЧЕЙКОЙ

Для получения необходимой в методе моментов системы уравнений выразим первые десять двумерных начальных моментов $M_{n\ell}$ ($0 \leq n + \ell \leq 3$) совместного распределения энерговыделения пары ливней по ячейкам годоскопического калориметра через центральные групповые моменты $\overline{\mu_{n\ell}}(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ (см. разд. 3) и неизвестные параметры ливней ($i = 1, 2$): S_i - энерговыделение; (x_i, y_i) - центры тяжести в плоскостях X и Y. В качестве оценок

координат, определяющих местонахождение соответствующего центра тяжести i -го ливня в центральной ячейке занимаемой им области в калориметре, используются величины

$$\bar{x}_i = x_i - E(x_i); \quad \bar{y}_i = y_i - E(y_i), \quad (1.П)$$

где $E(x_i)$ - целая часть числа x_i и также для y_i .

В принятых обозначениях система имеет вид

$$S_1 x_1^n y_1^\ell + S_2 x_2^n y_2^\ell = m_{nl}, \quad m_{00} = M_{00},$$

$$m_{nl} = M_{nl} - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\ell} C_n^k C_\ell^j (S_1 x_1^{n-k} y_1^{\ell-j} \mu_{kj}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + S_2 x_2^{n-k} y_2^{\ell-j} \mu_{kj}(\bar{x}_2, \bar{y}_2)). \quad (2.П)$$

В цилиндрической системе координат с центром в точке

$$x_0 = M_{10}/M_{00}, \quad y_0 = M_{01}/M_{00} \quad (3.П)$$

с помощью преобразования

$$x_i = r_i \cos \phi_i + x_0; \quad y_i = r_i \sin \phi_i + y_0, \quad (4.П)$$

где $\phi_2 = \phi_1 + \pi$;

$$\cos^2 \phi_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{m}_{20}}{\tilde{m}_{20} + \tilde{m}_{02}} + \frac{\tilde{m}_{20}^2}{\tilde{m}_{20}^2 + \tilde{m}_{11}^2} + \frac{\tilde{m}_{11}^2}{\tilde{m}_{11}^2 + \tilde{m}_{02}^2} \right), \quad (5.П)$$

эта система приводится с точностью до знаков к одномерному случаю (4):

$$M_{00} = S_1 + S_2, \quad (6.П)$$

$$0 = S_1 r_1 - S_2 r_2,$$

$$g_2 = S_1 r_1^2 + S_2 r_2^2,$$

$$g_3 = S_1 r_1^3 - S_2 r_2^3.$$

Выпишем решение системы (6.П):

$$r_{1,2} = [\pm g_3 + (g_3^2 + 4g_2^3)^{1/2}] / 2g_2, \quad (7.П)$$

$$S_{1,2} = M_{00} r_{2,1} / (r_1 + r_2),$$

здесь и выше

$$g_2 = \tilde{m}_{20} + \tilde{m}_{02},$$

$$g_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{m}_{30}}{\cos \phi_1} + \frac{\tilde{m}_{21}}{\sin \phi_1} + \frac{\tilde{m}_{12}}{\cos \phi_1} + \frac{\tilde{m}_{03}}{\sin \phi_1} \right),$$

а величины $\tilde{m}_{n\ell}$ (8.П) вычисляются по аналогичным (2.П) формулам, где вместо $M_{n\ell}$ подставляются центральные моменты совместного распределения энерговыделения пары ливней.

Решение полной системы находится с помощью итерационной процедуры:

$$(\tilde{m}_{n\ell} = m_{n\ell}) \rightarrow (5.П) \rightarrow (6.П) \rightarrow (7.П)$$

$$\uparrow \qquad \downarrow$$

$$(8.П) \leftarrow (1.П) \leftarrow (4.П) \rightarrow$$

Для получения приемлемой точности достаточно ~ 4 итераций.

Цена 11 коп.

© - Институт физики высоких энергий, 1981.

Издательская группа И Ф В Э

Заказ 421. Тираж 250. 0,9 уч.-изд.л. Т-06824.

Март 1981. Редактор М.Л. Фоломешкина.